1	2	3	4
B	~~B~~ B	B	B

Calif.: A

Apellido y Nombre:
Libreta:
Turno: ☒ Tarde ☐ Noche

Muy bien parcial!

Álgebra Lineal
Segundo cuatrimestre de 2011 - Segundo parcial
6/12/2011

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ una transformación lineal tal que:

- f tiene 3 autovalores distintos.
- -1 es raíz simple de $\mathcal{X}_f$.
- $\dim(\mathrm{Ker}(f - I)) = 2$.
- $\dim(\mathrm{Ker} f^2) - \dim(\mathrm{Ker} f) = 2$.
- $\dim(\mathrm{Ker} f^{17}) = 4$.

Hallar la forma de Jordan de f.

Ejercicio 2. Considerar $\mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ y el subespacio $S = < 1 + x >$.

i) Determinar una base de $S^\perp$.

ii) Hallar $f \in S^\perp$ tal que $\int_{-1}^{1}(f(x) - 1 - x^2)^2 dx$ tome el mínimo valor posible.

Ejercicio 3. Sea $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ una matriz hermitiana tal que $(A^2 + I)(A^2 - 3A + 2I) = 0$. Probar què para todo $x \in \mathbb{C}^4$ no nulo, $\langle A.x, x\rangle > 0$.

Ejercicio 4. Sean $\Pi : 3x - 4y = 5$ y $L : \lambda(1, 1, 1) + (1, 0, 1)$. Encontrar una recta L' tal que se satisfaga simultáneamente:

- $L' \cap L \neq \emptyset$.
- L' sea perpendicular a L.
- Todos los puntos de L' están a distancia 3 de Π.

Justifique todas sus respuestas.

iii) Como al autovalor 1 ya lo agoté, entonces $\alpha \neq 0$. Veamos que α tiene que ser mayor que 2.

Si $\alpha = 1 \Rightarrow \dim(Nu(A-2Id)) = 7$ pero $\dim(Nu(A-2Id)^2) = 5$ NO PUEDE SUCEDER

Si $\alpha = 2 \Rightarrow \{0\} \subsetneq Nu(A-2Id) \subsetneq \overset{5}{Nu(A-2Id)^2}$. Pero la dimensión de este último es 5 y dijimos que tiene que ser 7.

$$\text{si } \alpha = 3 \Rightarrow \{0\} \subsetneq Nu(A-2Id) \subsetneq \overset{\dim 5}{Nu(A-2Id)^2} \subsetneq \overset{\dim = 7}{Nu(A-2Id)^3}.$$

Notemos entonces que sí o sí $\dim(Nu(A-2Id))$ tiene que ser 3 porque sino no existe una combinación de bloques para que entren bien en los 7 lugares, entonces tenemos

$$\{0\} \subsetneq \overset{\dim 3}{Nu(A-2Id)} \subsetneq \overset{\dim 5}{Nu(A-2Id)^2} \subsetneq \overset{\dim 7}{Nu(A-2Id)^3}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leftarrow & (A-2I)^2 v_1 & \leftarrow & (A-2I) v_1 & \leftarrow & v_1 \\ 0 & \leftarrow & (A-2I)^2 v_2 & \leftarrow & (A-2I) v_2 & \leftarrow & v_2 \\ 0 & \leftarrow & v_3 & & & & \end{array}$$

Entonces en este caso la forma de Jordan es

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2&0&0&&&&&&& \\ 1&2&0&&&&&&& \\ 0&1&2&&&&&&& \\ &&&2&0&0&&&& \\ &&&1&2&0&&&& \\ &&&0&1&2&&&& \\ &&&&&&2&&& \\ &&&&&&&1&0& \\ &&&&&&&1&1& \\ &&&&&&&&&1 \end{pmatrix}}$$

$$\text{Si } \alpha = 4 \quad \{0\} \subsetneq Nu(A-2I) \subsetneq \overset{\dim = 5}{Nu(A-2Id)^2} \subsetneq Nu(A-2Id)^3 \subsetneq \overset{\dim = 7}{Nu(A-2Id)^4}$$

Esto me determina que $\dim Nu(A-2Id)^3 = 6$ pues tienen que estar incluidos estrictamente.

Además notemos que $\dim Nu(A-2I) = 3$ ó 4, cualquier otro valor genera problemas

$$\begin{array}{ccccc} & \dim 3 & \dim 5 & \dim 6 & \dim 7 \end{array}$$

Si $\dim Nu(A-2Id)=3 \Rightarrow \{0\} \subsetneq Nu(A-2Id) \subsetneq Nu(A-2I)^2 \subsetneq Nu(A-2Id)^3 \subsetneq Nu(A-2Id)^4$

$$0 \leftarrow (A-2Id)^3 v_1 \leftarrow (A-2Id)^2 v_1 \leftarrow (A-2Id) v_1 \leftarrow v_1$$

$$0 \leftarrow (A-2Id) v_2 \leftarrow v_2$$

$$0 \leftarrow v_3$$

$\Rightarrow$ La forma de Jordan es

$$\left(\begin{array}{cccccccccc}
2&0&0&0&&&&&&\\
1&2&0&0&&&&&&\\
0&1&2&0&&&&&&\\
0&0&1&2&&&&&&\\
&&&&2&0&&&&\\
&&&&1&2&&&&\\
&&&&&&2&&&\\
&&&&&&&1&0&\\
&&&&&&&1&1&\\
&&&&&&&&&1
\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} & \dim 4 & \dim 5 & \dim 6 & \dim 7 \end{array}$$

Si $\dim Nu(A-2Id)=4 \Rightarrow \{0\} \subsetneq Nu(A-2Id) \subsetneq Nu(A-2Id)^2 \subsetneq Nu(A-2Id)^3 \subsetneq Nu(A-2Id)^4$

$$0 \leftarrow (A-2Id)^3 v_1 \quad (A-2Id)^2 v_1 \leftarrow (A-2Id) v_1 \leftarrow v_1$$

$$0 \leftarrow v_2$$

$$0 \leftarrow v_3$$

$$0 \leftarrow v_4$$

El ker de $(A-2I)^4$ no puede ser distinto al de $(A-2I)^3$ por la condición 1

$\Rightarrow$ La forma de Jordan es

$$\left(\begin{array}{cccccccccc}
2&0&0&0&&&&&&\\
1&2&0&0&&&&&&\\
0&1&2&0&&&&&&\\
0&0&1&2&&&&&&\\
&&&&2&&&&&\\
&&&&&2&&&&\\
&&&&&&2&&&\\
&&&&&&&1&0&\\
&&&&&&&1&1&\\
&&&&&&&&&1
\end{array}\right)$$

3/7

2/5

2) Sean $(V,\langle , \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno y $B=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base ortonormal de V. Sean $v = 8v_1+5v_2+2v_3+v_4 \in V$ y S el subespacio $S=\langle v_1+2v_2+2v_4, 2v_2-v_4\rangle$.
Decidir si v está más cerca de S o de su complemento ortogonal.

Me voy a basar en que $V = P_S(V) + P_{S^\perp}(V)$
Hallo $P_S(V)$. Primero tengo que buscar una base ortogonal de S la que tengo no cumple pues

$\langle v_1+2v_2+2v_4 ; 2v_2-v_4\rangle = 4-2 = 2$. (usando que $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$
$\langle v_i, v_i\rangle = 1 \ \forall\, 1 \leq i \leq 4$

Entonces uso Gram-Schmidt

$z_1 = v_1+2v_2+2v_4$

$$z_2 = 2v_2 - v_4 - \left(\frac{\langle 2v_2-v_4 ; v_1+2v_2+2v_4\rangle}{\|v_1+2v_2+2v_4\|^2}(v_1+2v_2+2v_4)\right)$$

$$z_2 = 2v_2 - v_4 - \left(\frac{4-2}{\|v_1\|^2+\|2v_2\|^2+\|2v_4\|^2}(v_1+2v_2+2v_4)\right)$$

↳ Por teorema de Pitágoras pues $v_1 \perp v_2 \perp v_4$

$$z_2 = 2v_2 - v_4 - \left(\frac{2}{1+4+4}(v_1+2v_2+2v_4)\right)$$

$$z_2 = 2v_2 - v_4 - \frac{2}{9}v_1 - \frac{4}{9}v_2 - \frac{4}{9}v_4$$

$$z_2 = \frac{14}{9}v_2 - \frac{13}{9}v_4 - \frac{2}{9}v_1$$

$-2+28-26=0$

Entonces una base ortogonal de S es $S = \langle v_1+2v_2+2v_4, -\frac{2}{9}v_1+\frac{14}{9}v_2-\frac{13}{9}v_4 \rangle$ ✓

Entonces $P_S(v) = \frac{\langle v, v_1+2v_2+2v_4 \rangle}{\|v_1+2v_2+2v_4\|^2}(v_1+2v_2+2v_4) + \frac{\langle v, -\frac{2}{9}v_1+\frac{14}{9}v_2-\frac{13}{9}v_4 \rangle}{\|-\frac{2}{9}v_1+\frac{14}{9}v_2-\frac{13}{9}v_4\|^2}\left(-\frac{2}{9}v_1+\frac{14}{9}v_2-\frac{13}{9}v_4\right)$

$$P_S(v) = \frac{8+10+2}{9}(v_1+2v_2+2v_4) + \frac{-\frac{16}{9}+\frac{70}{9}-\frac{13}{9}}{\frac{4}{81}+\frac{196}{81}+\frac{169}{81}}\left(-\frac{2}{9}v_1+\frac{14}{9}v_2-\frac{13}{9}v_4\right)$$

Podías limpiar el 9...

$$P_S(v) = \frac{20}{9}v_1 + \frac{40}{9}v_2 + \frac{40}{9}v_4 + \left(\frac{41/\cancel{9}}{\frac{41}{9}}\right)\left(-\frac{2}{9}v_1+\frac{14}{9}v_2-\frac{13}{9}v_4\right)$$

Arrastrás el error.

$$P_S(v) = \frac{20}{9}v_1 + \frac{40}{9}v_2 + \frac{40}{9}v_4 + 9\left(-\frac{2}{9}v_1+\frac{14}{9}v_2-\frac{13}{9}v_4\right)$$

$$P_S(v) = \frac{20}{9}v_1 + \frac{40}{9}v_2 + \frac{40}{9}v_4 - 2v_1 + 14v_2 - 13v_4$$

$$P_S(v) = \frac{2}{9}v_1 + \frac{166}{9}v_2 - \frac{77}{9}v_4$$

$$\|P_S(v)\|^2 = \left\|\frac{2}{9}v_1 + \frac{166}{9}v_2 - \frac{77}{9}v_4\right\|^2 \Rightarrow \frac{4}{81} + \frac{27556}{81} + \frac{5929}{81} = \frac{3721}{9}$$

$$\Rightarrow \|P_S(v)\| = \sqrt{\frac{3721}{9}} = \boxed{\frac{61}{3}} = 20,\widehat{33}$$

$$P_{S^\perp}(v) = v - P_S(v) = 8v_1+5v_2+2v_3+v_4 - \frac{2}{9}v_1 - \frac{166}{9}v_2 + \frac{77}{9}v_4$$

$$P_{S^\perp}(v) = \frac{70}{9}v_1 - \frac{121}{9}v_2 + 2v_3 + \frac{86}{9}v_4$$

$$\|P_{S^\perp}(v)\|^2 = \left\|\frac{70}{9}v_1 - \frac{121}{9}v_2 + 2v_3 + \frac{86}{9}v_4\right\|^2 = \frac{4900}{81} + \frac{14641}{81} + 4 + \frac{7396}{81} = \frac{3029}{9}$$

$\Rightarrow \|P_{S^\perp}(v)\| = \frac{\sqrt{3029}}{3} \approx 18,35$ El número más chico es $\frac{\sqrt{3029}}{3}$ que es la distancia de V a S, entonces $\boxed{\text{N está más cerca de S}}$

4/7

3) a) T es TL si

a) $T(x+y) = \langle x+y, v\rangle w = (\langle x,v\rangle + \langle y,v\rangle) w = \langle x,v\rangle w + \langle y,w\rangle w$

$= T(x) + T(y)$ ✓

b) $T(kx) = \langle kx; v\rangle w = k\langle x,v\rangle w = k\,T(x)$ ✓ $k \in \mathbb{R}$

/ Por Propiedades del producto interno y de los números reales

- La T^* me suena a que es $T^*(u) = \langle u, w\rangle . v$

Vamos a Probarlo.

/

$\langle T(x); y\rangle = \langle \langle x; v\rangle ; w; y\rangle = \langle x,v\rangle \langle w; y\rangle$

$\langle x; T^*(y)\rangle = \langle x; \langle y,w\rangle v\rangle = \langle x,v\rangle \langle y,w\rangle = \langle x,v\rangle \langle y,w\rangle$

pues es un Producto Interno real.

$\Rightarrow T^*(u) = \langle u, w\rangle v \quad \forall\, v \in V.$

- b) Para ver que es autoadjunta si y solo si v es multiplo de w

veamos la doble implicación

$\Leftarrow$) Si v es multiplo de w $\Rightarrow$ $v = kw$ $\quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

/

$\Rightarrow \langle T(x); y\rangle \stackrel{?}{=} \langle x; T(y)\rangle$

$\langle \langle x,v\rangle w; y\rangle \stackrel{?}{=} \langle x, \langle y,v\rangle . w\rangle$

$\langle x,v\rangle \langle w,y\rangle \stackrel{?}{=} \langle x,w\rangle \langle y,w\rangle$

Pero estás usando lo que querés probar en algún sentido.

Nunca Mostrás que $T = T^*$.

so $v = kw$

$k\langle x,w\rangle \langle w,y\rangle \stackrel{\neq}{=} k\langle x,w\rangle \langle y,w\rangle$ y vemos que entonces esto sí es verdad, pues es una multiplicación de números reales con un $\mathbb{R}$ producto interno.

$\Rightarrow$) Se que T es autoadjunta entonces

$$T = T^* \Rightarrow \langle u,v\rangle w = \langle u,w\rangle v$$

$$\Rightarrow \frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,w\rangle} w = v \Rightarrow v = k.w \Rightarrow$$ v es múltiplo de w.

Pero si $\langle v,w\rangle = 0 \Rightarrow \langle u,v\rangle . w = 0$ pero $w \neq 0$.

$\Rightarrow \langle u,v\rangle = 0 \ \forall\, u \in V \Rightarrow v = 0$ pero $v \neq 0 \Rightarrow$ no es cero

5/7

EJERCICIO 4: Probemos que L es alabeada a L' ← sus vectores directores no son múltiplos.

i) $<(4,-3,0)> \neq <(0,0,1)>$

ii) $L \cap L' = \emptyset$

$\lambda(4,-3,0)+(1,2,3) = \rho(0,0,1)+(8,3,-2)$

$(4\lambda+1; -3\lambda+2; 3) = (8,3,\rho-2) \Rightarrow \quad 3 = \rho - 2$

$1 = \rho$

$4\lambda+1 = 8 \qquad -3\lambda+2 = 3$

$4\lambda = 7 \qquad -3\lambda = 1$

$\lambda = \frac{7}{4} \neq \lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ no existe intersección

Además notemos que $(4,-3,0) \perp (0,0,1) \Rightarrow$ Además de alabeadas, "son ortogonales", entonces si hallo el plano que contiene al punto de menor distancia de ellas? ya está porque cualquier recta contenida en ese plano que pase por el punto medio de los puntos más cercanos, va a cumplir que $L'' \cap L = \emptyset = L'' \cap L'$ y $d(L,L'') = d(L',L'')$. Solo basta hace que su subespacio asociado sea li con los de L y L'

$d(L,L') = d(m_1, m_2)$ con $m_1 \in L$ y $m_2 \in L'$

pero veamos que si $P_1 = (8,3,-2)$ y $P_2 = (1,2,3)$

y $P_1 - P_2 = P_{<(4,-3,0),(0,0,1)>}(P_1-P_2) + P_{<(4,-3,0),(0,0,1)>^{\perp}}(P_1-P_2)$ me va a dar los puntos más cercanos entre sí. La proyección sobre ese ortogonal va a ser el que después cuando le calcule la norma, me va a dar la mínima distancia

Por ello hallo $P_{<(4,-3,0),(0,0,1)>}(P_1-P_2)$

$P_1 - P_2 = (7,1,-5)$

$$P_{\langle(4,-3,0);(0,0,1)\rangle}(7,1,-5) = \frac{\langle(7,1,-5);(4,-3,0)\rangle}{\|(4,-3,0)\|^2}(4,-3,0) + \frac{\langle(7,1,-5);(0,0,1)\rangle}{\|(0,0,1)\|^2}(0,0,1)$$

$$P = \frac{25}{25}(4,-3,0) + \frac{-5}{1}(0,0,1) = (4,-3,0) - 5(0,0,1)$$

R^{+}

$$\Rightarrow \quad P_1 - P_2 = (4,-3,0) - 5(0,0,1) + P_{\perp}(P_1-P_2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(8,3,-2)+5(0,0,1)}_{\in L'} - \underbrace{(1,2,3)-(4,-3,0)}_{\in L} = P_{\perp}(P_1-P_2) \text{ (mínima distancia)}$$

$$\|(8,3,3) - (-3,1,3)\| = d(L,L')$$

Entonces el punto medio ~~que~~ entre ellos es $\frac{(8,3,3)+(-3,1,3)}{2} = \left(\frac{5}{2}; 1; 3\right)$

Y el vector $(8,3,3)-(-3,1,3) = (11,-4,0) = (11,-4,0)$ $\quad = \left(\frac{5}{2};1;3\right)$

$\Rightarrow$ El plano es $11x - 4y = d$ si $\left(\frac{5}{2};1;3\right)$ pertenece entonces $d = \frac{47}{2}$

$\Rightarrow \quad \Pi: 11x - 4y = \frac{47}{2}$ $\Rightarrow$ ~~Los generadores de Π son estos~~ saco los generadores

~~Vectores~~

$$11x - \frac{47}{2} = 4y \qquad \Rightarrow \quad (x,y,z) = \left(x, \tfrac{11}{4}x - \tfrac{47}{8}; z\right) = x\left(1, \tfrac{11}{4}; 0\right) + z(0,0,1) + \left(0, -\tfrac{47}{8}, 0\right)$$

$$\frac{11}{4}x - \frac{47}{8} = y$$

Ojo con este vector.

$$\Rightarrow \Pi = \langle(4,11;0);(0,0,1)\rangle + \left(0;-\tfrac{47}{8};0\right)$$

Entonces el vector $(1,11,0)$ cumple que no es igual a los de las rectas y si construyo $L'': \langle(1,11,0)\rangle + \left(\frac{5}{2};1;3\right) \Rightarrow$ Esta recta cumple lo pedido. Además cualquier recta tal que cumpla que su subespacio es l.i con los de L y L' y esté en ese plano, va a cumplir. Entonces L'' no es única

6/7

EJERCICIOS: Sea $\Phi: \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}$ la forma bilineal cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ Hallar una base de $\mathbb{Q}^4$ tal que la matriz $|\Phi|_B$ sea diagonal

· Mi idea es aplicar el algoritmo que vimos en clase:

1) $a_{11} = 0$ pero $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$ por lo tanto multiplico a la matriz por la matriz elemental P^{21}

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Ahora como $a_{11} \neq 0$ multiplico para que el resto de la primera fila y primera columna sean todos ceros

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $a_{22} \neq 0$ así que repito la misma idea pero con la matriz de 3x3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Ahora me quedó $a_{33}=0$, $a_{43}\neq 0$ pero $a_{44}=0$. Así que tengo que sumarle la 4ª columna a la 3ª columna y con las filas también

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-4&0&0\\ 0&0&0&2\\ 0&0&2&0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}}_{M_4} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-4&0&0\\ 0&0&4&2\\ 0&0&2&0 \end{pmatrix}$$

5) Ahora sí como $a_{33}\neq 0$ sí puedo hacer:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&-\frac{1}{2}&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-4&0&0\\ 0&0&4&2\\ 0&0&2&0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&-\frac{1}{2}\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}}_{M_5} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-4&0&0\\ 0&0&4&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$$

Entonces la base B va a ser las columnas de la matriz $M_1 M_2 M_3 M_4 M_5$ que es:

$$\begin{pmatrix} 0&1&1/2&-1/4\\ 1&-2&-1&1/2\\ 0&0&1&-1/2\\ 0&0&1&1/2 \end{pmatrix}$$

Entonces $\boxed{B=\left\{(0,1,0,0);(1,-2,0,0);\left(\tfrac{1}{2};-1;1;1\right);\left(-\tfrac{1}{4};\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\right)\right\}}$

$$\begin{pmatrix} 1&-1&0\\ -1&2&1\\ 0&1&3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}($$

7/7